

Gorshkov A.A. ON STABLE SEQUENTIAL KUHN-TUCKER THEOREM IN CONVEX PROGRAMMING IN REFLEXIVE SPACE AND ITS APPLICATION

The stable with respect to the errors in the initial data sequential Kuhn–Tucker theorem in non-differential form for parametric convex mathematical programming problem in reflexive space and the possibility of its application for solving unstable optimal control and inverse problems are discussed.

Key words: convex programming; sequential optimization; parametric problem; Kuhn–Tucker theorem in nondifferential form; dual regularization; optimal control; unstable problems.

УДК 517.929.8

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© Б.Г. Гребенщиков, А.Б. Ложников

Ключевые слова: линейное запаздывание; асимптотические свойства решений.

Рассматривается асимптотическое поведение решения и его производной неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с линейным запаздыванием.

Рассматривается неоднородная система m -го порядка с линейным запаздыванием

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(\mu t) + f(t), \quad t \geq t_0 > 0, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1. \quad (1)$$

Здесь A и B — постоянные матрицы размерности $m \times m$, причем собственные значения λ матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, собственные значения ρ матрицы $A^{-1}B$ меньше единицы по модулю; непрерывно дифференцируемая вектор-функция $f(t)$ ограничена при $t \geq t_0$, причем $\lim_{t \rightarrow \infty} \|f'(t)\| = 0$, где $\|f(t)\| = \sum_{i=1}^m |f_i(t)|$, $f_i(t)$ — элементы вектор-функции $f(t)$. Норму матрицы определяем в соответствии с нормой вектора. На начальном множестве $t \in [\mu t_0, t_0]$ $x(t) = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — непрерывная вектор-функция.

Отметим, что система первого порядка, описывающая простейшую схему колебаний токоприемника в момент прохождения эластичной опоры, рассматривалась в работе [1].

При условиях, сформулированных выше, справедливы следующие утверждения:

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x'(t)\| = 0$; 2) Решение системы (1) ограничено при $0 < t_0 \leq t < \infty$.

Схема доказательства. Пусть $t > t_0 \mu^{-1}$. Продифференцируем обе части системы (1) по t . Получаем систему

$$x''(t) = Ax'(t) + \mu Bx'(\mu t) + f'(t).$$

Данная система — система с постоянными коэффициентами, матрица $\mu A^{-1}B$ имеет собственные значения меньше единицы по модулю при любом μ , $f'(t)$ — исчезающая вектор-функция. Как следует из работ [2], [3], ее решение $x'(t)$ есть также исчезающая вектор-функция, т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x'(t)\| = 0$.

Разрешим систему (1) относительно вектор-функции $x(t)$. Имеем неоднородную разностную систему

$$x(t) = -A^{-1}Bx(\mu t) - A^{-1}f(t) + A^{-1}x'(t). \quad (2)$$

Теперь полагаем $x_n = \max_t \|x(t)\|$, $x'_n = \max_t \|x'(t)\|$, $f_n = \max_t \|f(t)\|$, где $t \in [t_0\mu^{1-n}, t_0\mu^{-n}]$. Тогда из (2), применяя формулу вариации постоянных и учитывая, что

$$\|(A^{-1}B)^k\| \leq Lq^k, \quad L = \text{const}, \quad L > 1, \quad q = \text{const}, \quad 0 < q < 1,$$

получаем неравенство

$$x_{n+1} \leq L_1 q^{n+1} x_0 + L_2 \sum_{j=0}^n q^j f_{n+1-j} + L_3 \sum_{j=0}^n q^j x'_{n+1-j},$$

где $L_i > 1$, $i = 1, 2, 3$ — некоторые константы. Первое и третье слагаемые правой части неравенства стремятся к нулю, а второе слагаемое ограничено при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что решение системы (1) ограничено.

Рассмотрим в качестве примера систему 2-го порядка

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 3.5 & 0.4 \\ -8 & -0.8 \end{pmatrix} x(0.5t) + \begin{pmatrix} 1/(t+1) + 2 \\ \ln(t+2)/(t+1)^2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь $\lambda_1(A) = -1$, $\lambda_2(A) = -4$; $\rho_1(A^{-1}B) = 0.5$, $\rho_2(A^{-1}B) = 0.2$; $\lim_{t \rightarrow \infty} \|f'(t)\| = 0$.

Проведем численное интегрирование системы (3) при $t_0 = 1$, $\varphi(t) = (1, 1)^T$. Графики решения и его производной данной системы приведены на рис. 1 и 2. Расчеты проведены с помощью пакета прикладных программ Time-Delay System Toolbox [4].

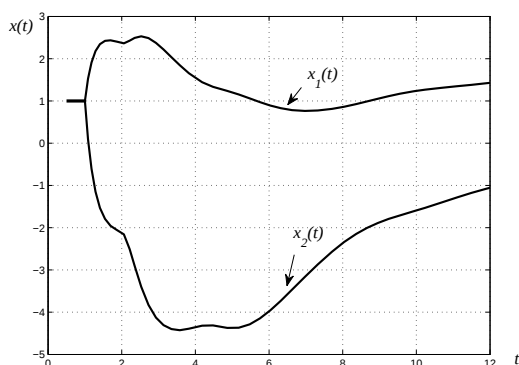


Рис. 1

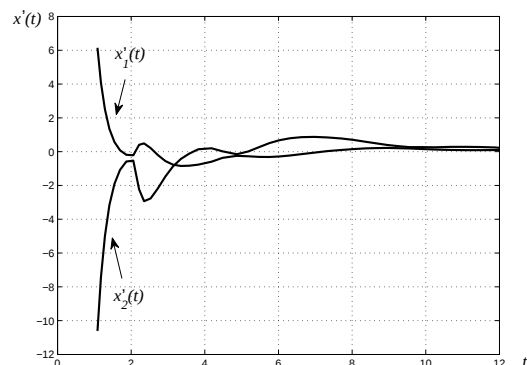


Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Fox L., Mayers D.F., Ockendon J.R., Taylor A.B. On a functional differential equation // J. Inst. Math. Applics. 1972. № 8. P. 271-307.
2. Гребенчиков Б.Г. Устойчивость систем с переменным запаздыванием, линейно зависящим от времени // Устойчивость и нелинейные колебания: сборник научных трудов. Свердловск: УрГУ, 1983. С. 25-34.
3. Гребенчиков Б.Г. Об ограниченности решений неоднородной системы с запаздыванием, линейно зависящим от времени // Устойчивость и нелинейные колебания: сборник научных трудов. Свердловск: УрГУ, 1986. С. 7-12.
4. Ким А.В., Пыменов В.Г. i -Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00089) и АВЦП 1.994.2011 «Устойчивые вычислительные методы анализа динамики сложных систем».

Grebenshchikov B.G., Lozhnikov A.B. ON ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTION OF AN INHOMOGENEOUS SYSTEM WITH LINEAR DELAY

The asymptotic properties of the solution and its derivative of an inhomogeneous system of differential equations with constant coefficients and linear delay are considered.

Key words: linear delay; asymptotic properties of solutions.

УДК 517.977

ОБ АСИМПТОТИКЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© И.В. Гребенникова, А.Г. Кремлев

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием; оптимальное управление; фундаментальная матрица.

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. Предлагается процедура построения начального приближения управляющего воздействия в минимаксной задаче управления.

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_1(t)x(t-h) + B_1(t)u(t), \\ mdy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_2(t)x(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$; $x \in R^n$, $y \in R^m$; $u \in R^r$ — управление. Начальное состояние системы (1) $x(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно, и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0 , Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Управление $u(t)$, $t \in T$ — измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$.

Рассматривается минимаксная задача управления: среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)), \quad (2)$$

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi\left(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))\right),$$

где $\varphi(\cdot)$ заданная выпуклая функция (с конечными значениями); $z' = (x', y')$, $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$, $t \in T$ — решение системы (1), исходящих из $Z_0 = X_0 \times Y_0$ при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$. Выполнено условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Оптимальное управление $u^0(\cdot, \mu)$ и величина $\varepsilon^0(t_1, \mu)$ зависят от параметра μ . Однако эти характеристики при $\mu \rightarrow +0$ могут не сходиться [1] к соответствующим решениям задачи (2) для вырожденной системы, полученной из (1) при $\mu = 0$. Поэтому важным